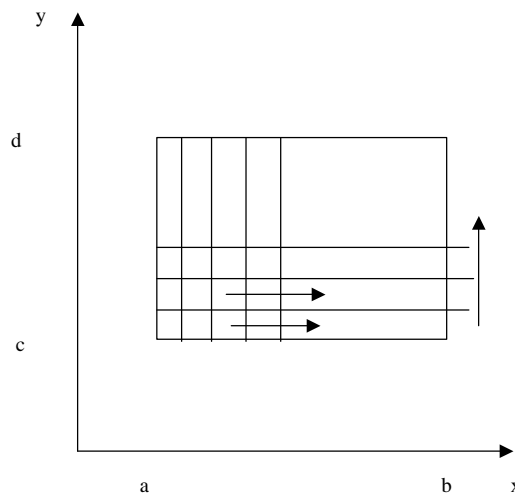


1 Integrali Doppi e Cambiamento nell'Ordine di Integrazione

Introduciamo il concetto di Integrale Doppio in modo assolutamente non rigoroso.
Consideriamo il seguente grafico



Supponiamo di dividere il rettangolo definito da $abcd$ in piccoli rettangolini e supponiamo di volerli sommare tutti. Un possibile modo e' quello di sommare tutti i rettangolini per ogni riga orizzontale (si vedano le frecce orizzontali nel grafico) e poi di sommare tutte le righe tra di loro (si veda la freccia verticale nel grafico). Nel primo caso e' come se stessimo facendo una sorta di integrazione in x (tenendo y costante) mentre nel secondo caso stiamo facendo una sorta di integrazione in y . Questa e' l'idea che sta dietro agli integrali doppi.

In simboli, per il caso in esame, possiamo scrivere:

$$\int_c^d \int_a^b dx dy \quad (1)$$

l'espressione 1) ci dice che stiamo integrando prima rispetto a x (inner integral) e dopo rispetto ad y (outer integral). Nel caso volessimo integrare una qualche funzione $f(x, y)$ definita nell'area $abcd$ del grafico sopra, possiamo scrivere:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

Notate che in questo caso ottenete una misura del volume tra $z = f(x, y)$ ed il piano $x-y$.

Il cambiamento nell'ordine di integrazione si basa sul fatto che:

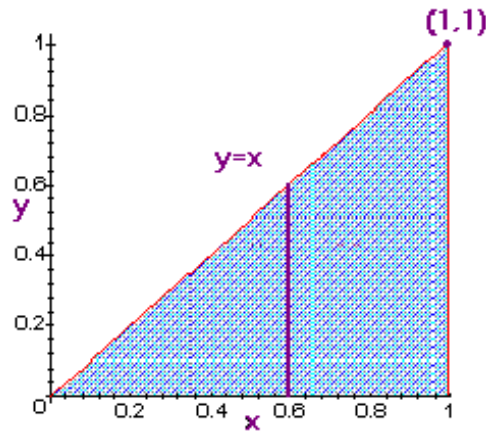
$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int f(x, y) dy dx \quad (3)$$

Vale a dire integrare prima rispetto ad x e poi rispetto ad y e' equivalente ad integrare prima rispetto ad y e poi rispetto ad x . Tuttavia in 3) abbiamo integrali indefiniti. Per gli integrali definiti (come in 1)), e' evidente che vale lo stesso principio di equivalenza, ma in questo caso, nel cambiare ordine di integrazione, occorre definire bene gli estremi di integrazione dei singoli integrali.

Ad esempio, si consideri il seguente integrale doppio, dove integriamo prima rispetto ad y (mantenendo costante x):

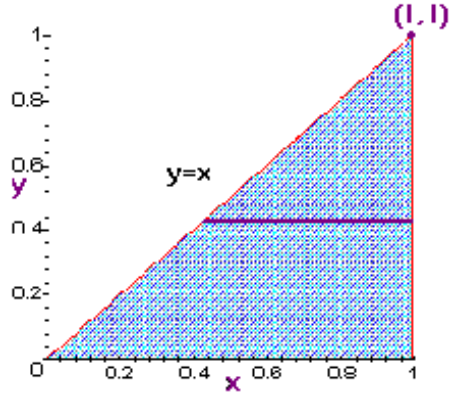
$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx \quad (4)$$

La regione di integrazione del doppio integrale 4) e' visualizzata nel grafico sottostante, dove gli estremi di integrazione sono: $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq x \leq 1$. (La linea blu vi da la direzione verso la quale state integrando).



Se adesso volessimo integrare prima rispetto ad x (mantenendo y costante), la regione di integrazione (che deve essere identica a quella di prima) diventa:

Cio' che e' cambiato rispetto a prima, sono i limiti degli intervalli in cui vado a definire le mie variabili. I nuovi limiti di integrazione diventano: $0 \leq y \leq 1$ e



$y \leq x \leq 1$. Per cui l'integrale di riferimento (dopo il cambiamento nell'ordine di integrazione) diventa:

$$\int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy \quad (5)$$

E' evidente che gli integrali 4) e 5) sono equivalenti.

2 Ordine di Integrazione nel Modello di Yaari

Utilizziamo la simbologia in Heijdra and Van der Ploeg capitolo 16.

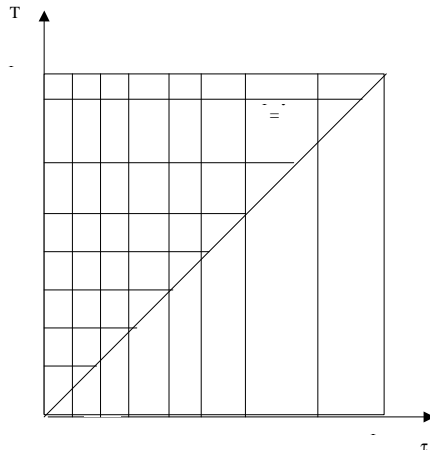
La funzione di utilita' attesa dell'agente rappresentativo e' data da:

$$E\Lambda(T) \equiv \int_0^{\bar{T}} f(T)\Lambda(T)dT \quad (6)$$

dove $\Lambda(T) = \int_0^T u(c(\tau))e^{-\rho\tau} d\tau$. Usando quest'ultima espressione, riscriviamo la 6) come:

$$E\Lambda(T) \equiv \int_0^{\bar{T}} f(T) \left[\int_0^T u(c(\tau))e^{-\rho\tau} d\tau \right] dT = \int_0^{\bar{T}} \left[\int_0^T f(T)u(c(\tau))e^{-\rho\tau} d\tau \right] dT \quad (7)$$

Adesso abbiamo un integrale doppio, dove stiamo integrando prima rispetto a τ . La regione di integrazione per il doppio integrale 7) e' definita nel grafico sottostante:



L'inner integral in 7), e' definito su τ compreso tra 0 e T . Quindi la regione di riferimento per l'inner-integral e' data dall'area con linee orizzontali nel grafico sopra. L'outer-integral in 7) e' definito su T compreso tra 0 e \bar{T} . Quindi la regione di riferimento e' quella con linee verticali. (Le linee vi danno anche un'idea sulla direzione verso la quale state integrando). La regione di integrazione del doppio integrale sara' pertanto pari alla regione quadrettata (notate la coincidenza con la regione su cui e' definito l'inner-integral).

Ora supponiamo di voler integrare prima rispetto a T . Quindi vogliamo riscrivere il doppio integrale in 7) come:

$$\int \left[\int f(T) dT \right] u(c(\tau)) e^{-\rho\tau} d\tau \quad (8)$$

nel quale dobbiamo mettere i giusti estremi di integrazione. Dato che la regione di integrazione di questo doppio integrale deve essere la stessa di prima, adesso l'inner-integral e' definito su T che assume valori tra τ e \bar{T} . Mentre l'outer integral deve essere definito su τ che assume valori tra 0 e \bar{T} .

Quindi, cambiando l'ordine di integrazione in 7), otteniamo il seguente doppio integrale equivalente:

$$\int_0^{\bar{T}} \left[\int_{\tau}^{\bar{T}} f(T) dT \right] u(c(\tau)) e^{-\rho\tau} d\tau \quad (9)$$

Dato che $\int_{\tau}^{\bar{T}} f(T)dT = 1 - F(\tau)$ (probabilita' di essere vivo dopo τ istanti), l'espressione 9) puo' essere scritta come:

$$\int_0^{\bar{T}} (1 - F(\tau))u(c(\tau))e^{-\rho\tau} d\tau \quad (10)$$

2.1 Sulla Condizione di Arbitraggio nel Modello di Yaari

La probabilita' di essere vivi in τ e' data da:

$$\int_{\tau}^{\bar{T}} f(T)dT = 1 - F(\tau) \quad (11)$$

mentre la probabilita' di essere vivi a $\tau + dt$ e' data da:

$$\int_{\tau+d\tau}^{\bar{T}} f(T)dT = 1 - F(\tau + d\tau) \quad (12)$$

Possiamo definire la seguente probabilita' condizionata:

$$\Pr(\text{essere vivi a } \tau + d\tau \mid \text{si e' vivi in } \tau) = \frac{1 - F(\tau + d\tau)}{1 - F(\tau)} \quad (13)$$

Consideriamo la derivata rispetto a τ di $1 - F(\tau)$, questa e' data da:

$$\frac{d[1 - F(\tau)]}{d\tau} = -f(\tau) \quad (14)$$

dove $f()$ e' la density function. Utilizzando la definizione di derivata come rapporto incrementale, possiamo scrivere $-f(\tau)$ nel seguente modo:

$$-f(\tau) \approx \frac{[1 - F(\tau + d\tau)] - [1 - F(\tau)]}{d\tau} \quad (15)$$

La 15) da solamente un'approssimazione, dato che l'uguaglianza sarebbe esatta solo prendendo il limite del secondo membro per $d\tau \rightarrow 0$.

Usando la 15), abbiamo che

$$1 - F(\tau + d\tau) \approx [1 - F(\tau)] - f(\tau)d\tau. \quad (16)$$

La condizione di actuarial fairness implica che:

$$(1 + r^A(\tau)d\tau) \left[\frac{1 - F(\tau + d\tau)}{1 - F(\tau)} \right] = 1 + r(\tau)d\tau \quad (17)$$

la 17) puo' essere riscritta come:

$$r^A(\tau)d\tau \left[\frac{1 - F(\tau + d\tau)}{1 - F(\tau)} \right] = \frac{[1 - F(\tau)] - [1 - F(\tau + d\tau)]}{[1 - F(\tau)]} + r(\tau)d\tau \quad (18)$$

Sostituendo l'espressione 16) al posto di $[1 - F(\tau + d\tau)]$ a secondo membro della 18), abbiamo che:

$$r^A(\tau)d\tau \left[\frac{1 - F(\tau + d\tau)}{1 - F(\tau)} \right] = \frac{f(\tau)}{[1 - F(\tau)]}d\tau + r(\tau)d\tau \quad (19)$$

o equivalentemente:

$$r^A(\tau) \left[\frac{1 - F(\tau + d\tau)}{1 - F(\tau)} \right] = \frac{f(\tau)}{[1 - F(\tau)]} + r(\tau) \quad (20)$$

Prendendo il limite della 20) per $d\tau \rightarrow 0$, e ricordandosi che $\frac{f(\tau)}{[1 - F(\tau)]} = \beta(\tau)$, otteniamo la condizione di arbitraggio:

$$r^A(\tau) = r(\tau) + \beta(\tau) \quad (21)$$