

# 1 Appendice matematica: Il modello a generazioni sovrapposte di Blanchard (1985)<sup>1</sup>

Questa appendice si basa sulla presentazione in Blanchard e Fischer (1990), di cui si segue la notazione.

**Remark 1** Data la variabile casuale  $X = \text{“tempo che separa l’individuo dalla morte”}$ , distribuita secondo una funzione di densità esponenziale  $f_x(t) = pe^{-pt}$  con  $p > 0$ , allora la speranza di vita è  $\frac{1}{p}$ .

**Proof.** Si risolve banalmente integrando per parti:

$$E(X) = \int_0^{\infty} tpe^{-pt} dt = [-te^{-pt}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = 0 + p^{-1} [-e^{-pt}]_0^{\infty} = p^{-1}$$

Nei passaggi precedenti si è fatto uso della formula di integrazione per parti:

$$\int_0^{\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int_0^{\infty} f'(x)g(x)dx$$

e del fatto che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-pt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{pt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{pe^{pt}} = 0$$

■

**Remark 2** Dato il vincolo di bilancio istantaneo in  $t$  per una generica generazione:<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \frac{dv(z)}{dz} = (r(z) + p)v(z) + y(z) - c(z) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v(z)e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

si ottiene il vincolo di bilancio intertemporale

$$\int_t^{\infty} c(z)R(t, z)dz = v(t) + h(t) \quad (2)$$

dove  $h(t) = \int_t^{\infty} y(z)R(t, z)dz = \text{capitale umano}$  e  $R(t, z) = e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu} = \text{fattore di sconto rilevante per l’individuo (comprendente } p) \text{ fra } z \text{ e } t$ .

**Proof.** Integro il vincolo di bilancio istantaneo e moltiplico entrambi i membri per  $R(t, z) = e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu}$

$$\int_t^{\infty} \frac{dv(z)}{dz} e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu} dz - \int_t^{\infty} v(z) [(r(z) + p)] e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu} dz = \int_t^{\infty} [y(z) - c(z)] e^{-\int_t^z (r(\mu) + p)d\mu} dz$$

<sup>1</sup>© 2003, Guido Ascari, Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Università di Pavia

<sup>2</sup>Si noti che per semplicità di notazione si astrae dalla data di nascita della generazione, e ciò fino a quando non si tratteranno le variabili aggregate, ossia a partire dal Remark 5.

$$\int_t^\infty \frac{d[v(z)e^{-\int_t^z (r(\mu)+p)d\mu}]}{dz} dz = \int_t^\infty [y(z) - c(z)] e^{-\int_t^z (r(\mu)+p)d\mu} dz$$

$$[v(z)R(t, z)]_t^\infty = h(t) - \int_t^\infty c(z)R(t, z)dz$$

$$\int_t^\infty c(z)R(t, z)dz = h(t) + v(t)$$

■

**Remark 3** La condizione del primo ordine per il sentiero ottimale del consumo è

$$\frac{dc(z)}{dz} = [r(z) - \theta]c(z) \quad (3)$$

**Proof.** Il problema di una generica generazione è

$$\begin{aligned} \underset{c(z)}{Max} U &= \int_t^\infty \log c(z) e^{-(\theta+p)(z-t)} dz \\ \text{s.t.} &\begin{cases} v(z) = (r(z) + p)v(z) + y(z) - c(z) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) e^{-\int_t^z (r(\mu)+p)d\mu} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

che si può risolvere costruendo il seguente hamiltoniano

$$H(z) = \{\log c(z) + \lambda [(r(z) + p)v(z) + y(z) - c(z)]\} e^{-(\theta+p)(z-t)}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} H_c &= 0 \quad \implies \quad \frac{1}{c} = \lambda \\ H_v &= \lambda(\theta + p) - \dot{\lambda} \quad \implies \quad \lambda[r(z) + p] = \lambda(\theta + p) - \dot{\lambda} \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \lambda e^{-(\theta+p)(z-t)} v(z) = 0$$

da cui si ottiene facilmente la condizione del primo ordine, notando che

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = c \left( -\frac{1}{c^2} \right) \dot{c} = \frac{\dot{c}}{c}$$

■

**Remark 4** La funzione del consumo è data da

$$c(t) = (\theta + p)[v(t) + h(t)] \quad (4)$$

**Proof.** Integro fra  $t$  e  $z$  la condizione del primo ordine (3), dopo aver moltiplicato per  $e^{-\int_t^z (r(\mu) - \theta) d\mu}$

$$\int_t^z \frac{d[c(s)e^{-\int_t^s (r(\mu) - \theta) d\mu}]}{ds} ds = 0 \quad \implies \quad c(z)e^{-\int_t^z (r(\mu) - \theta) d\mu} - c(t) = 0$$

$$c(z) = c(t)e^{\int_t^z (r(\mu) - \theta) d\mu}$$

Questa equazione mi esprime il legame fra il consumo in due istanti temporali diversi ( $z$  e  $t$ ) lungo il sentiero ottimale, o meglio lega il livello di consumo in un generico istante futuro  $z$  al livello di consumo iniziale in  $t$ . Ed infatti è derivata solamente dalla condizione del primo ordine, la quale esprime il profilo ottimale del consumo nel tempo.

Sostituisco questa equazione nel vincolo di bilancio intertemporale (2). Il membro di sinistra diventa

$$\begin{aligned} \int_t^\infty c(z)R(t, z)dz &= \int_t^\infty c(t)e^{\int_t^z (r(\mu) - \theta) d\mu} e^{-\int_t^z (r(\mu) + p) d\mu} dz = c(t) \int_t^\infty e^{-\int_t^z (\theta + p) d\mu} = c(t) \int_t^\infty e^{-(\theta + p)(z - t) d\mu} = \\ &= c(t) \left( \frac{-1}{\theta + p} \right) \left[ e^{-(\theta + p)(z - t)} \right]_t^\infty = \left( \frac{c(t)}{\theta + p} \right) \end{aligned}$$

da cui si ottiene la (4). ■

**Remark 5** Il livello di consumo aggregato è quindi dato da

$$C(t) = (\theta + p)[V(t) + H(t)]$$

**Proof.** Il consumo aggregato è dato dall'aggregazione dei consumi individuali delle singole generazioni, ossia

$$C(t) \equiv \int_{-\infty}^t c(s, t) p e^{-p(t-s)} ds$$

dove adesso  $c(s, t)$  è il consumo nel periodo  $t$  di una generazione nata in  $s$  e  $p e^{-p(t-s)}$  è la dimensione nel periodo  $t$  di una generazione nata in  $s$ . Sostituendo per  $c(s, t)$

$$C(t) = \int_{-\infty}^t (\theta + p)[v(s, t) + h(s, t)] p e^{-p(t-s)} ds = (\theta + p)[V(t) + H(t)]$$

dove  $V(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(s, t) p e^{-p(t-s)} ds$  e  $H(t) \equiv \int_{-\infty}^t h(s, t) p e^{-p(t-s)} ds$ . ■

**Remark 6** Se si ipotizza il seguente profilo decrescente dei redditi da lavoro

$$y(s, t) = aY(t)e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{con } \alpha \geq 0 \quad (5)$$

allora deve essere  $a = \frac{\alpha+p}{p}$ .

**Proof.** Il reddito aggregato è uguale all'aggregazione dei redditi delle singole generazioni, ossia

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^t y(s, t) p e^{-p(t-s)} ds = \int_{-\infty}^t aY(t) e^{-\alpha(t-s)} p e^{-p(t-s)} ds = \\ apY(t) \int_{-\infty}^t e^{-(\alpha+p)(t-s)} ds &= \frac{apY(t)}{\alpha+p} \left[ e^{-(\alpha+p)(t-s)} \right]_{-\infty}^t = \frac{apY(t)}{\alpha+p} \end{aligned}$$

da cui si ottiene  $a = \frac{\alpha+p}{p}$ . ■

**Remark 7** Il capitale umano aggregato è dato da

$$H(t) = \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\int_t^z (\alpha+p+r(\mu)) d\mu} dz \quad (6)$$

**Proof.** Il capitale umano di una singola generazione è

$$h(s, t) = \int_t^{\infty} \underbrace{aY(z) e^{-\alpha(z-s)}}_{y(s,t)} \underbrace{e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu}}_{R(t,z)} dz = a \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\alpha(z-t)} e^{-\alpha(t-s)} e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} dz$$

sostituisco in  $H(t)$

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \int_{-\infty}^t h(s, t) p e^{-p(t-s)} ds = \int_{-\infty}^t \left( a \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\alpha(z-t)} e^{-\alpha(t-s)} e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} dz \right) p e^{-p(t-s)} ds = \\ &= ap \int_{-\infty}^t \underbrace{\left[ \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\alpha(z-t)} e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} dz \right]}_{\text{indipendente da } s} e^{-(\alpha+p)(t-s)} ds = \\ &= ap \left[ \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\alpha(z-t)} e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} dz \right] \left( \frac{1}{\alpha+p} \right) \left[ e^{-(\alpha+p)(t-s)} \right]_{-\infty}^t = \\ &= \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\alpha(z-t)} e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} dz = \int_t^{\infty} Y(z) e^{-\int_t^z (\alpha+p+r(\mu)) d\mu} dz \end{aligned}$$

■

**Remark 8** Il risultato precedente implica che l'equazione di accumulazione del capitale umano aggregato è

$$\begin{cases} \dot{H}(t) = (\alpha + p + r(t))H(t) - Y(t) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) e^{-\int_t^z (\alpha+p+r(\mu)) d\mu} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

**Proof.** Si deve applicare la regola di Leibniz per la derivazione di integrali rispetto ad una variabile da cui dipendono gli estremi d'integrazione. Questa recita che data una funzione  $F(r) = \int_{A(r)}^{B(r)} f(x, r) dx$ , con  $f(x, r)$ ,  $A(r)$  e  $B(r) \in C^1$ , allora

$$\frac{dF(r)}{dr} = f(B(r), r) \frac{dB(r)}{dr} - f(A(r), r) \frac{dA(r)}{dr} + \int_{A(r)}^{B(r)} \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= -Y(t) + \int_t^\infty Y(z) e^{-\int_t^z (\alpha + p + r(\mu)) d\mu} (\alpha + p + r(t)) dz = \\ &= (\alpha + p + r(t)) H(t) - Y(t) \end{aligned}$$

Si noti che per fare l'operazione inversa, ossia per passare da (7) a (6), bisogna integrare fra  $t$  ed  $\infty$  ed imporre la condizione no-Ponzi-game sul capitale umano:  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) e^{-\int_t^z (\alpha + p + r(\mu)) d\mu} = 0$ . ■

**Remark 9** Dalla definizione di ricchezza finanziaria aggregata,  $V(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(s, t) p e^{-p(t-s)} ds$ , segue che l'equazione d'accumulazione della ricchezza finanziaria aggregata è

$$\dot{V}(t) = r(t)V(t) + Y(t) - C(t) \quad (8)$$

**Proof.** Applicando ancora la regola di Leibniz si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= v(t, t)p + \int_{-\infty}^t \left[ \frac{dv(s, t)}{dt} p e^{-p(t-s)} + v(s, t) p (-p) e^{-p(t-s)} \right] ds = \\ &= v(t, t)p + \int_{-\infty}^t \frac{dv(s, t)}{dt} p e^{-p(t-s)} ds - pV(t) \end{aligned}$$

Si noti che  $v(t, t)p$  = ricchezza finanziaria della coorte di nuovi nati in  $t$  ( $p$  è la dimensione della coorte di nuovi nati e  $v(t, t)$  è la ricchezza finanziaria individuale). Ma i nuovi nati nascono senza eredità nè dotazioni, quindi con ricchezza finanziaria nulla per ipotesi, ossia  $v(t, t) = 0$ .  $pV(t)$  = ricchezza di coloro che muoiono in  $t$ , che va quindi sottratta (redistribuita attraverso l'assicurazione a coloro che sono in vita con ricchezza positiva).  $\int_{-\infty}^t \frac{dv(s, t)}{dt} p e^{-p(t-s)} ds$  = variazione della ricchezza di coloro che rimangono in vita = variazione della ricchezza individuale moltiplicata per la dimensione della coorte, integrata per tutte le coorti esistenti fino a  $t$ .

Ora dal vincolo di bilancio individuale  $\frac{dv(s, t)}{dt} = (r(t) + p)v(s, t) + y(s, t) - c(s, t)$ , quindi

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \int_{-\infty}^t [(r(t) + p)v(s, t) + y(s, t) - c(s, t)] p e^{-p(t-s)} ds - pV(t) = \\ &= \int_{-\infty}^t r(t)v(s, t) p e^{-p(t-s)} ds + \int_{-\infty}^t p v(s, t) p e^{-p(t-s)} ds + \int_{-\infty}^t [y(s, t) - c(s, t)] p e^{-p(t-s)} ds - pV(t) = \\ &= r(t)V(t) + pV(t) + Y(t) - C(t) - pV(t) = r(t)V(t) + Y(t) - C(t) \end{aligned}$$

■

Infine si noti che integrando fra  $t$  ed  $\infty$  la (8) ed imponendo  $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) e^{-\int_t^z r(\mu) d\mu} = 0$  si ottiene una sorta di “vincolo delle risorse intertemporale” per l’aggregato

$$V(t) + \int_t^\infty Y(z) e^{-\int_t^z r(\mu) d\mu} = \int_t^\infty C(z) e^{-\int_t^z r(\mu) d\mu}$$

La condizione  $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) e^{-\int_t^z r(\mu) d\mu} = 0$  discende a sua volta dall’aggregazione della condizione di trasversalità per le singole generazioni  $\lim_{z \rightarrow \infty} v(s, z) e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} = 0$ , ossia

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^z v(s, z) e^{-\int_t^z (r(\mu)+p) d\mu} p e^{-p(t-s)} ds = 0$$