Università di Pavia

Richiami di Statistica

Eduardo Rossi

Un'idea centrale della statistica è che un campione sia una rappresentazione della popolazione. Si possono sfruttare le analogie fra il campione e la popolazione per inferire da questo le caratteristiche della popolazione.

Campione casuale

Siano $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ variabili casuali tali che le y_i siano realizzazioni mutuamente indipendenti della variabile casuale Y con f.d.c., $F_Y(y)$. Allora $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ è detto un campione casuale dalla popolazione con f.d.c. $F_Y(y)$.

L'inferenza statistica è l'applicazione di modelli di probabilità all'analisi dei dati e alla sua interpretazione.

L'inferenza classica stabilisce un modello di probabilistico per le informazioni campionarie, deriva modelli probabilistici per funzioni dei dati (*statistiche*) ed inferisce caratteristiche ignote (*parametri*) del modello probabilistico di partenza dai dati campionari.

Sia $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ un campione casuale da una densità $f(\cdot;\theta)$, dove la forma della densità è nota ma il parametro θ è ignoto (scalare reale o vettore di numeri reali). L'obiettivo è trovare statistiche, funzioni delle osservazioni $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$, da usare per la stima di θ.

Stima puntuale: la migliore valutazione di θ.

Hypothesis test: stabilire se un particolare valore di θ è consistente con l'evidenza campionaria

Interval estimation: intervalli di confidenza per i parametri

due approcci alla stima **Inferenza Classica e Bayesiana**.

Statistica: E' una funzione di v.c. osservabili, essa stessa è una v.c. osservabile, che non contiene alcun parametro ignoto.

Stimatore: Ogni statistica i cui valori sono usati per stimare $\tau(\theta)$, dove $\tau(\theta)$ è una funzione di θ, è uno stimatore di $\tau(\theta)$.

Stima: Un particolare valore realizzato dello stimatore.

Gli stimatori sono basati su diversi principi: non distorsione (correttezza), invarianza, sufficienza, ecc.

Sia $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ un parametro della popolazione incognita P o θ se P è nella famiglia parametrica.

Ogni stimatore di ϑ è soggetto ad un **errore di stima**

$$T(y_1, \ldots, y_N) - \vartheta$$

quando osserviamo $Y_1 = y_1, \ldots, Y_N = y_N$. Questo non solo perchè $T(Y_1, \ldots, Y_N)$ è casuale. In alcuni problemi $T(y_1, \ldots, y_N)$ non può eguagliare ϑ.

Esempio banale: $T(Y_1, \ldots, Y_N)$ ha una c.d.f. continua così che

$$P[T(Y_1, \ldots, Y_N) = \vartheta] = 0$$

Esempio non banale: sia $(Y_1, \ldots, Y_N)$ una v.c. i.i.d. binaria (variabili bernoulliane) con

$$P(Y_i = 1) = p$$

$$P(Y_i = 0) = 1 - p$$

$\overline{Y}$ è un buon stimatore di $\vartheta = p$, ma $\overline{y}$ non può eguagliare ϑ se ϑ non è uno dei $j/N, \quad j = 0, 1, \ldots, N$.

La distorsione (*bias*) di uno stimatore $T(Y)$ di un parametro reale ϑ della popolazione incognita è definito come

$$b_T(P) = E[T(Y)] - \vartheta$$

indicato con $b_T(\theta)$ quando P appartiene alla famiglia parametrica indicizzata da θ.

Uno stimatore è detto non distorto per ϑ se e solo se

$$b_T(P) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Uno stimatore $T(Y)$ può essere visto come uno stimatore senza **errore sistematico**.

Uno stimatore non distorto può avere errori negativi e positivi ampi

$$T(y) - \vartheta$$

quindi per uno stimatore non distorto $T(Y)$ è preferibile che i valori di $T(y)$ siano altamente concentrati intorno a ϑ.

Sia θ una funzione reale della f.d.c. e sia $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ un campione casuale estratto dalla popolazione con f.d.c. F_Y. La v.c. $Z = h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ è uno stimatore non distorto di θ se

$$E[Z] = \theta$$

Consideriamo un campione casuale $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ dalla popolazione con f.d.c. F_Y, il momento primo campionario

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

è uno stimatore di $\mu = E[Y]$ nel senso che $E[\widehat{\mu}] = \mu$.

Stimatore non distorto

$$E[\widehat{\mu}] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[Y_i] = \mu$$

$$Var(\widehat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{N}$$

La distribuzione della media $\overline{Y}_{10}$ basata su un campione casuale di dimensione 10 ha la stessa media di $\overline{Y}_{20}$ basata su un campione di 20. Nel secondo caso la dispersione delle stime intorno a μ è la metà del primo.

Si può scegliere tra stimatori non distorti sulla base del confronto delle loro varianze.

Stimatore efficiente: Se T_A e T_B sono due stimatori non distorti di θ e

$$Var[T_A] < Var[T_B]$$

allora T_A è **efficiente** relativamente a T_B

$$MSE_T[\theta] = E[(T(Y)-\vartheta)^2] = E[(T(Y)-E(T(Y))+E(T(Y))-\theta)^2]$$

$$MSE_T[\theta] = E[(T(Y) - E(T(Y)))^2] + [E(T(Y)) - \vartheta]^2$$

$$MSE_T[\theta] = Var(T(Y)) + [E(T(Y)) - \vartheta]^2$$

perchè $E[(T(Y) - E(T(Y)))(E(T(Y)) - \vartheta)] = 0$.
Se il bias

$$E(T(Y)) - \vartheta$$

è zero, allora

$$MSE_T[\theta] = Var(T(Y))$$

Mean Absolute Error di uno stimatore $T(Y)$

$$E|T(Y) - \vartheta|$$

un'altra misura della precisione dello stimatore è la probabilità di essere distante da ϑ:

$$P[|T(Y) - \vartheta| \geq \epsilon] \quad \text{with fixed} \quad \epsilon > 0$$

Consideriamo un campione casuale $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ dalla popolazione con c.d.f. F_Y, il momento primo campionario

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

è uno stimatore non distorto. Se la varianza di Y, σ^2, esiste lo stimatore non distorto è:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \overline{Y})^2}{N-1} = \frac{N}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \overline{Y})^2 \right] = \frac{N}{N-1} \widehat{\sigma}^2$$

infatti

$$\begin{aligned} E[s^2] &= \frac{N}{N-1} E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2\right] \\ &= \frac{N}{N-1} E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i^2) - (\overline{Y})^2\right] \\ &= \frac{N}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E(Y_i^2) - E(\overline{Y}^2)\right] \end{aligned}$$

con $E(Y_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$.

$$E[s^2] = \frac{N}{N-1}\left\{\frac{1}{N}N(\sigma^2+\mu^2) - E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i\right)^2\right]\right\}$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
E[s^2] &= \frac{N}{N-1}\left\{(\sigma^2+\mu^2) - \frac{1}{N^2}E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2\right]\right\} \\
&= \frac{N}{N-1}\left\{(\sigma^2+\mu^2) - \frac{1}{N^2}E\left(\sum_i\sum_j Y_iY_j\right)\right\} \\
&= \frac{N}{N-1}\left\{(\sigma^2+\mu^2) - \frac{1}{N^2}\left(N(\sigma^2+\mu^2)+(N^2-N)\mu^2\right)\right\} \\
&= \frac{N}{N-1}\left\{(\sigma^2+\mu^2) - \frac{1}{N^2}\left(N\sigma^2+N^2\mu^2\right)\right\} \\
&= \frac{N}{N-1}\left(\sigma^2 - \frac{1}{N}\sigma^2\right) = \sigma^2
\end{aligned}
$$

Una stima puntuale non fornisce alcuna informazione sull'intervallo dell'errore associato alla stima. L'idea della stima ad intervalli è usare i dati campionari per costruire un intervallo, tale che possiamo aspettarci che questo contenga il valore vero del parametro in una certa proporzione di campioni, o con un certo livello di confidenza.

Più è ampio l'intervallo maggiore è la probabilità che contenga il parametro.

Intervallo di confidenza: Sia $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ un campione casuale dalla densità $f(\cdot;\theta)$. Siano $T_1 = t_1(Y_1, \ldots, Y_N)$ e $T_2 = t_2(Y_1, \ldots, Y_N)$ due statistiche che soddisfano $T_1 \leq T_2$ per i quali

$$Pr\{T_1 < \tau(\theta) < T_2\} \equiv 1 - \alpha$$

L'intervallo (T_1, T_2) è detto un intervallo di confidenza di livello $(1-\alpha)100\%$ per $\tau(\theta)$; $(1-\alpha)$ è il *livello di confidenza.*

Quantità pivotale: Sia $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ un campione casuale dalla densità $f(\cdot;\theta)$, dove θ è un vettore di parametri incogniti. La funzione $Q = Q(\cdot;\theta)$ è una quantità pivotale se e solo la distribuzione non dipende da θ.

Il metodo della quantità pivotale: Se $Q = Q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N; \theta)$ è una quantità pivotale ed ha una f.d.p., allora per ogni $0 < (1-\alpha) < 1$ esistono q_1 e q_2 che dipendono da $(1-\alpha)$ tali che

$$Pr\{q_1 < Q < q_2\} = 1 - \alpha$$

Se per ogni possibile valore del campione $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$

$$q_1 < Q(y_1, \ldots, y_N; \theta) < q_2$$

se e solo se

$$t_1(y_1, \ldots, y_N) < \tau(\theta) < t_2(y_1, \ldots, y_N)$$

per funzioni t_1 e t_2 (che non dipendono da θ), **allora** (T_1, T_2) è un intervallo di confidenza per $\tau(\theta)$, dove $T_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ $i = 1, 2$.

L'essenziale caratteristica del metodo pivotale è che la diseguaglianza

$$\{q_1 < Q(y_1, \ldots, y_N; \theta) < q_2\}$$

possa essere riscritta o invertita come

$$\{t_1(y_1, y_2, \ldots, y_N) < \tau(\theta) < t_2(y_1, y_2, \ldots, y_N)\}$$

per ogni possibile realizzazione del campione $y_1, y_2, \ldots, y_N$. Due passaggi

1. trovare una quantità pivotale

2. invertirla

Sia $(Y_1, \ldots, Y_N)$ un campione casuale

$$
\begin{aligned}
Y_i &\sim N(\mu, \sigma^2) \\
\overline{Y} &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \\
\frac{\overline{Y} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / N}} &\sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

$$
Var\left[\frac{1}{N}\sum_i Y_i\right] = E[(\overline{Y} - \mu)^2] = E\left[\overline{Y}^2\right] - \mu^2
$$

Esempio. Intervallo di confidenza per la media

$$
\begin{aligned}
E\left[\overline{Y}^2\right] &= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum Y_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N^2}E\left[\left(\sum Y_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N^2}E\left[\sum Y_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} Y_i Y_j\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\left\{E\left[\sum Y_i^2\right] + E\left[\sum_i \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} Y_i Y_j\right]\right\} \\
&= \frac{1}{N^2}\left\{N(\sigma^2+\mu^2) + N(N-1)\mu^2\right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{N} + \mu^2
\end{aligned}
$$

$$Var\left[\frac{1}{N}\sum_i Y_i\right] = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}$$

$$\frac{\overline{Y}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/N}} \text{ e } \frac{s^2}{\sigma^2}$$

sono indipendenti. La quantità pivotale

$$\left[\frac{\overline{Y}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/\mu}}\right]/\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}} = \frac{\overline{Y}-\mu}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$$

$$Pr\left\{\left|\frac{\overline{Y}-\mu}{s/\sqrt{N}}\right| \leq t_{N-1;\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

quantile $t_{N-1;\alpha}$: $Pr\{t_{N-1} \leq t_{N-1;\alpha}\} = 1-\alpha$. Possiamo scrivere

$$Pr\left\{\overline{Y} - t_{N-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \overline{Y} + t_{N-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}}\right\} = 1-\alpha$$

questo intervallo conterrà μ con probabilità $1-\alpha$. I limiti di questi intervalli sono v.c. perchè $\overline{Y}$ e s^2 sono v.c. in campioni ripetuti. L'intervallo è centrato su uno stimatore non distorto $\overline{Y}$.

Un analogo intervallo per σ^2 è

$$Pr\left\{\sigma^2 \in \left[s^2\frac{N-1}{\chi^2_{N-1;1-\alpha/2}}, s^2\frac{N-1}{\chi^2_{N-1;\alpha/2}}\right]\right\} = 1-\alpha$$

quantile

$$1-\alpha/2 = Pr\{\chi^2_{N-1} \leq \chi^2_{N-1;1-\alpha/2}\}$$

$\chi^2_{N-1;\alpha}$ è il quantile $1-\alpha$ della distribuzione χ^2_{N-1}. Poichè la distribuzione chi-quadrato è asimmetrica, questo intervallo di confidenza non è centrato sullo stimatore non-distorto s^2.

Ipotesi statistica: E' un'asserzione o congettura sulla distribuzione di una o più variabili casuali. Se l'ipotesi statistica specifica completamente la distribuzione, allora è detta *semplice*; altrimenti è *composta*.

Test: E' una regola o procedura per decidere se rifiutare l'ipotesi.

Due ipotesi sono discusse:
Ipotesi nulla: H_0
Ipotesi alternativa: H_1.
Se l'ipotesi nulla è falsa, allora l'ipotesi alternativa è vera e viceversa.
Se l'ipotesi nulla non è rifiutata allora H_0 è accettata.

Gli elementi della verifica delle ipotesi:

- **Test**: $\tau(Y)$
- **Spazio dei possibili campioni**: $\mathcal{Y}$
- **Regione critica**: $\mathcal{C}_\tau$, l'insieme dei valori dello spazio campionario considerati significativamente diversi da quelli che si realizzerebbero in presenza di H_0.
- **Regione di accettazione**: $\mathcal{C} - \mathcal{C}_\tau$, l'insieme dei risultati campionari che sono coerenti con quanto stabilito sotto l'ipotesi nulla.

Un test di H_0 scompone $\mathcal{Y}$ in due regioni $\mathcal{C}_\tau$ e $\mathcal{C} - \mathcal{C}_\tau$. Se $(y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathcal{C}_\tau$, H_0 è rifiutata.

Due tipi di errori:

1. Errore di I tipo: Rifiutare H_0 quando è vera.
2. Errore di II tipo: Accettare H_0 quando è falsa.

La dimensione dell'errore di I tipo è $Pr\{$ Rifiutare $H_0|H_0$ Vera$\}$.

$$\alpha_n(\theta) = Pr[\tau(Y) \in \mathcal{C}_\tau | H_0]$$

La dimensione dell'errore di II tipo è $Pr\{$ Accettare $H_0|H_0$ Falsa$\}$

$$\beta_n(\theta) = Pr[\tau(Y) \in \mathcal{C} - \mathcal{C}_\tau | H_1]$$

dipendenza dalla numerosità campionaria (n) e dai valori parametrici (θ), come nel caso di ipotesi composta.

Ipotesi nulla semplice ed ipotesi alternativa semplice

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Ipotesi Nulla semplice ed ipotesi alternativa bilaterale

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Ipotesi Nulla semplice ed ipotesi alternativa unilaterale

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Nel caso in cui l'ipotesi nulla non sia semplice ma composta

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

si può ricondurre a un sistema con ipotesi nulla semplice: $H_0 : \theta = \theta_0$. Il rifiuto dell'ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ implica il rifiuto dell'ipotesi $H_0 : \theta \leq \theta_0$.

Funzione di potenza: Se la distribuzione dalla quale è stato ottenuto il campione è parametrizzata da θ (il valore vero del parametro), dove $\theta \in \Theta$, allora associato ad ogni test esiste una *funzione di potenza*:

$$\pi_\tau(\theta) = Pr_\theta[(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) \in \mathcal{C}_\tau]$$

descrive la probabilità, al variare di θ, di rifiutare H_0. Una funzione di potenza ideale assegna 0, per quei valori di θ corrispondenti all'ipotesi nulla e 1 per quei θ corrispondenti all'ipotesi alternativa.

$$\pi_\tau(\theta) = 1 - \beta_n(\theta) = Pr[\tau(Y) \in \mathcal{C}_\tau | H_1]$$

descrive la probabilità che la statistica porti a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 quando è falsa.

Distribuzione normale $N(\mu, 1)$. μ ignoto. Campione casuale semplice di 10 elementi $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10})$ si vuole verificare il sistema di ipotesi:

$$
\begin{aligned}
H_0 : &\quad \mu = 0 \\
H_1 : &\quad \mu = 1
\end{aligned}
$$

due ipotesi semplici. Si utilizza la statistica test

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{10}} \sum_{i=1}^{10} Y_i$$

Regione di rifiuto:

$$\mathcal{C}_\tau = \{\tau | \tau \geq 1,65\}$$

Esempio

Sotto H_0

$$\tau(Y) \sim N(0,1)$$

sotto H_1

$$\tau(Y) \sim N(\sqrt{10},1)$$

Probabilità errore di primo tipo:

$$\alpha_{10} = \int\limits_{1,65}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau^2\right\} \mathrm{d}\tau$$

Probabilità errore di secondo tipo:

$$\beta_{10} = \int\limits_{-\infty}^{1,65} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tau-\sqrt{10})^2\right\} \mathrm{d}\tau$$

Sia α che β non dipendono dai valori parametrici trattandosi di ipotesi semplici.

Potenza del test è $1-\beta$, cioè la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla $\mu = 0$ quando il vero μ è pari a 1.

Si consideri il sistema d'ipotesi:

$$H_0: \quad \mu \leq 0$$
$$H_1: \quad \mu > 0$$

entrambe ipotesi composte. Statistica test

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{10}} \sum_{i=1}^{10} Y_i$$

Regione critica

$$\mathcal{C}_\tau = \{\tau | \tau \geq 1,65\}$$

Probabilità errore di primo tipo

$$\alpha_{10}(\mu) = \int_{1,65}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tau - \sqrt{10}\mu)^2\right\} \mathrm{d}\tau \;\; \text{per} \;\; \mu \leq 0$$

Probabilità errore di secondo tipo:

$$\beta_{10}(\mu) = \int_{-\infty}^{1,65} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tau - \sqrt{10}\mu)^2\right\} \mathrm{d}\tau \;\; \text{per} \;\; \mu > 0$$

Potenza del test

$$\pi_{10}(\mu) = 1 - \beta_{10}(\mu) = \int_{1,65}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tau - \sqrt{10}\mu)^2\right\} \mathrm{d}\tau \;\; \text{per} \;\; \mu > 0$$

Queste probabilità dipendono dal valore di μ. $\alpha_{10}(\mu)$ è crescente con μ ed assume il valore massimo per $\mu = 0$. $\pi_{10}(\mu)$ assume valori vicini a 1 tanto più il valore di μ è lontano da quanto ipotizzato sotto H_0.

$(Y_1, \ldots, Y_N)$ sia un campione casuale da $f(y;\mu) = \phi_{\mu,25}(y)$

$$H_0 : \mu \leq 17$$

$$\tau : \text{Rifiutare se e solo se } \overline{Y} > 17 + 5/\sqrt{N}$$

$$\pi_\tau(\mu) = Pr_\mu\left[\overline{Y} > 17 + 5/\sqrt{N}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{17 + 5/\sqrt{N} - \theta}{5/\sqrt{N}}\right)$$

La dimensione del test (size)

Sia τ un test dell'ipotesi

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad \Theta_0 \subset \Theta$$

La dimensione del test è:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \tau(\theta)$$

Per individuare il test ottimale fissiamo la dimensione delll'errore di primo tipo e minimizziamo quello di secondo tipo.

Test più potente: Un test τ^* per

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

è detto test più potente se e solo se:

1. $\pi_{\tau^*}(\theta_0) = \alpha$, α livello di significatività
2. $\pi_{\tau^*}(\theta_1) \geq \pi_\tau(\theta_1)$ per ogni altro test τ per il quale $\pi_\tau(\theta_0) \leq \alpha$.

E' fissata la dimensione dell'errore di I tipo (uguale ad α, livello di significatività) e minimizzata la dimensione la dimensione dell'errore di II tipo.

Un test è detto più potente di dimensione α se ha dimensione α e se fra tutti i test di dimensione α o inferiore ha la potenza maggiore.

1 - $\alpha \equiv$ Coefficiente di confidenza del test. Corrisponde alla probabilità di accettare l'ipotesi nulla quando è vera.

Si fissa il livello di significatività e poi si cerca il test che minimizza la probabilità d'errore del II tipo o che massimizza la potenza del test $\pi(\theta)$.

Un test con livello di significatività pari a α e una funzione di potenza $\pi^*(\theta)$ è detto *uniformemente più potente* a livello α se:

$$\pi^*(\theta) \geq \pi(\theta) \quad \theta \in \Theta_1$$

per ogni altro test con uguale livello di significatività α e funzione di potenza $\pi(\theta)$.

Test corretto

Un test con livello di significatività α e funzione di potenza $\pi(\theta)$ è *corretto* se:

$$\pi(\theta) \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

Il test è corretto se la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è falsa è maggiore della probabilità di rifiutarla quando è vera.

La procedura di N-P è scegliere una $\mathcal{C}_\tau$, cioè trovare un metodo per calcolare $\tau(Y_1, \ldots, Y_N)$ e scegliere il valore critico, tale per cui la dimensione del test non ecceda α.

Per applicare tale teoria, il problema che deve essere risolto è costruire delle statistiche test $\tau(Y_1, \ldots, Y_N)$ che hanno una distribuzione nota sotto H_0.

Se

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

si può calcolare una stima basata su un intervallo di confidenza di θ dai dati, e se l'intervallo contiene θ_0, accettare H_0, altrimenti rifiutare.

Se l'intervallo ha un coeffciente di confidenza pari a $(1 - \alpha)$, allora il test risultante avrebbe un livello di significatività di α