Università di Pavia

Potenza dei test nel MRLM gaussiano

Eduardo Rossi

Gli elementi della verifica delle ipotesi:

- **Test**: $\tau(Y)$
- **Spazio dei possibili campioni**: $\mathcal{Y}$
- **Regione critica**: $\mathcal{C}_\tau$, l'insieme dei valori dello spazio campionario considerati significativamente diversi da quelli che si realizzerebbero in presenza di H_0.
- **Regione di accettazione**: $\mathcal{C} - \mathcal{C}_\tau$, l'insieme dei risultati campionari che sono coerenti con quanto stabilito sotto l'ipotesi nulla.

Un test di H_0 scompone $\mathcal{Y}$ in due regioni $\mathcal{C}_\tau$ e $\mathcal{C} - \mathcal{C}_\tau$. Se $(y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathcal{C}_\tau$, H_0 è rifiutata.

Se la distribuzione dalla quale è stato ottenuto il campione è parametrizzata da θ (il valore vero del parametro), dove $\theta \in \Theta$, allora associato ad ogni test esiste una *funzione di potenza*:

$$\pi_\tau(\theta) = Pr_\theta[\tau(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) \in \mathcal{C}_\tau]$$

descrive la probabilità, al variare di θ, di rifiutare H_0. Una funzione di potenza ideale assegna 0, per quei valori di θ corrispondenti all'ipotesi nulla e 1 per quei θ corrispondenti all'ipotesi alternativa.

$$\pi_\tau(\theta) = 1 - \beta_n(\theta) = Pr_\theta[\tau(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) \in \mathcal{C}_\tau | H_1]$$

descrive la probabilità che la statistica porti a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 quando è falsa.

La probabilità dell'errore di II tipo dipende dal valore che il parametro sottoposto a verifica assume sotto l'ipotesi alternativa e quindi dalla distribuzione della statitsica test sotto la particolare alternativa.

Modello partizionato:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \epsilon$$

$$\mathbf{X}_1 \quad (N \times (K-1))$$

$$\mathbf{x}_2 \quad (N \times 1)$$

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$t_{\beta_2} = \frac{\widehat{\beta}_2}{s(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{-1/2}}$$

ma

$$\widehat{\beta}_2 = (\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{-1}\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y}$$

t_{β_2} si può anche esprimere come

$$t_{\beta_2} = \frac{\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y}}{s(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{1/2}}$$

sotto la nulla e l'alternativa:

$$\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y}|\mathbf{X} \sim N\left((\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)\beta_2, \sigma^2(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)\right)$$

$$\frac{\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y}}{\sigma(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{1/2}}|\mathbf{X} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{1/2}\beta_2, 1\right)$$

$$\lambda \equiv \frac{1}{\sigma}(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{1/2}\beta_2$$

$$\frac{(N-K)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-K}$$

$$t_{\beta_2} = \frac{\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y}}{s(\mathbf{x}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{x}_2)^{1/2}}|\mathbf{X} \sim \frac{N(\lambda, 1)}{\left[\chi^2_{(N-K)}/(N-K)\right]^{1/2}} = t_{(N-K,\lambda)}$$

il numeratore e il denominatore sono variabili casuali indipendenti. E' una t-student non centrale con un numero di gradi di libertà pari a quello della χ^2 e parametro di non centralità pari alla media della normale, $\frac{\widehat{\beta}_2}{se(\widehat{\beta}_2)}$.

La $t_{(N-K,\lambda)}$ è molto simile alla $N(\lambda, 1)$. Il parametro di non-centralità dipende da

1. il valore di β_2
2. σ^2
3. N

Significatività congiunta dei coefficienti. Possiamo ottenere la distribuzione sotto l'alternativa. Modello partizionato:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \epsilon$$

possiamo scriverlo

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{X}_2\beta_2 + \epsilon \end{aligned}$$

sotto l'ipotesi nulla

$$H_0 : \beta_2 = \mathbf{0}$$

ovvero

$$H_0 : \mathbf{R}\beta = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{k_2 \times k_1} | \mathbf{I}_{K_2} \end{array} \right]$$

$\mathbf{v} = \epsilon$. Se $\beta_2 \neq \mathbf{0}$ errore di specificazione sto omettendo le variabili in $\mathbf{X}_2$

$$\mathbf{v}|\mathbf{X}_2 \sim N\left(\mathbf{X}_2\beta_2, \sigma^2\mathbf{I}_N\right)$$

Numeratore della F

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{R}\widehat{\beta} - \mathbf{c}\right)' \left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1} \left(\mathbf{R}\widehat{\beta} - \mathbf{c}\right) &= \widehat{\mathbf{v}}'\widehat{\mathbf{v}} - \widehat{\epsilon}'\widehat{\epsilon} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_X\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\left[\mathbf{M}_{X_1} - \mathbf{M}_X\right]\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\left[\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_{X_1}\right]\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}'\left[\mathbf{P}_{X_1} - \mathbf{P}_X\right]\mathbf{y} = (\mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{v})'[\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_{X_1}](\mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{v})$$
$$= \mathbf{v}'[\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_{X_1}]\mathbf{v}$$

Il termine di errore $\mathbf{v}$ non è centrato:

$$E\left[\mathbf{v}|\mathbf{X}\right] = \mathbf{X}_2\beta_2 + E\left[\epsilon|\mathbf{X}\right] = \mathbf{X}_2\beta_2$$

Sia $\mathbf{z} \sim N\left(\mu, \sigma^2\mathbf{I}_N\right)$, $\mathbf{M}$ matrice idempotente con $r(\mathbf{M}) = h$, allora la forma quadratica

$$\frac{\mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z}}{\sigma^2} \sim \chi^2_h(\mu'\mathbf{M}\mu)$$

$\mu'\mathbf{M}\mu$ parametro di non centralità.

Segue che

$$\mathbf{v}'[\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_{X_1}]\mathbf{v}|\mathbf{X}_2 \sim \sigma^2 \chi^2_N \left[\beta_2'(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{X}_2)\beta_2/\sigma^2\right]$$

Sotto l'ipotesi alternativa il denominatore della statistica mantiene la distribuzione χ^2_{N-K} poichè s^2 è ottenuta sulla base del modello non vincolato.

Numeratore e denominatore sono indipendenti

$$\widehat{F}|\mathbf{X}_2 \sim \frac{\chi^2_h \left[\beta_2'(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{X}_2)\beta_2/\sigma^2\right]/h}{\chi^2_{N-K}/(N-K)} \equiv F_{h,(N-K)}\left[\beta_2'(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_{X_1}\mathbf{X}_2)\beta_2/\sigma^2\right]$$

la distribuzione $F_{h,(N-K)}$ cambia al variare di $\mathbf{X}_2$ via il parametro di non centralità.

La potenza aumenta con

- N
- la distanza tra H_0 e H_1
- l'ortogonalità tra $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$.