Università di Pavia

Econometria

2007-2008

Soluzioni degli Esercizi 1

Maggio, 2008

1. Espandete il prodotto matriciale:

$$\mathbf{X} = \{[\mathbf{AB} + (\mathbf{CD}')][(\mathbf{EF})^{-1} + \mathbf{GH}]\}'$$

assumete che tutte le matrici siano quadrate e che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ siano invertibili.

Soluzione

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E}^{-1})'(\mathbf{F}^{-1})'\mathbf{B}'\mathbf{A}' + \mathbf{H}'\mathbf{G}'\mathbf{B}'\mathbf{A}' + (\mathbf{E}^{-1})'(\mathbf{F}^{-1})'\mathbf{DC}' + \mathbf{H}'\mathbf{G}'\mathbf{DC}'$$

2. Sia $col(\mathbf{A})$ lo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ e $ker(\mathbf{A})$ lo spazio nullo di $\mathbf{A}$ (o *kernel*)

$$ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$$

$$ker(\mathbf{A}') = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{0}\}.$$

Considerate la matrice (3×2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Mostrate che

$$col(\mathbf{A}) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} :$$

determinando i valori di λ_1 e λ_2 partendo dalla definizione di $col(\mathbf{A})$.

Soluzione

Lo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ è dato da:

$$col(\mathbf{A}) = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sia $\lambda_1 = y_1 + 2y_2$ e $\lambda_2 = 3y_1 + 4y_2$. Allora

$$y_1 = -2\lambda_1 + \lambda_2 \quad 2y_2 = 3\lambda_1 - \lambda_2$$

Quindi

$$5y_1 + 6y_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2$$

sostituendo si ottiene

$$col(\mathbf{A}) = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Considerate le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Trovate il rango di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

(b) Mostrate che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = r(\mathbf{AA}') = r(\mathbf{A}'\mathbf{A})$

(c) E' possibile costruire una matrice (3×4) di rango 4?

Soluzione

(a) Le prime due righe di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono linearmente indipendenti. Quindi, $r(\mathbf{A}) \geq 2$ e $r(\mathbf{B}) \geq 2$. Ma $r(\mathbf{A}) < 3$, perchè se $\mathbf{u} = [20, -17, 2]'$ quindi

$$\mathbf{A}'\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

segue che $r(\mathbf{A}) = 2$. Invece $r(\mathbf{B}) = 3$ perchè $\mathbf{B}'\mathbf{z} = \mathbf{0}$ implica che $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

(b) Sappiamo che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = 2$. Scrivendo i prodotti $\mathbf{AA}'$ e $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ è chiaro che i ranghi devono essere 2 o 3. Ma

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 54 & 24 & 78 \\ 24 & 62 & 86 \\ 78 & 86 & 164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{AA}')\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 62 & 80 & 60 \\ 80 & 104 & 84 \\ 60 & 84 & 114 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -17 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(c) No non è possibile. Ci sono solo tre righe e queste non possono generare una spazio con quattro dimensioni.

4. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $(m \times n)$ e sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ per un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

   (a) Mostrate che

   $$r(\mathbf{A}) \leq n - 1.$$

   (b) Vale il contrario?

   Soluzione

   (a) Sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ per un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Se indichiamo con $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, allora

   $$x_1\mathbf{a}_1 + \ldots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

   da cui le colonne di $\mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti e

   $$r(\mathbf{A}) \leq n - 1.$$

   (b) Vale anche il contrario. Se

   $$\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

   allora le colonne sono linearmente indipendenti e $r(\mathbf{A}) = n$.

5. (a) Mostrate che il rango di una matrice diagonale eguaglia il numero di elementi diagonali non nulli.

   (b) E' vero anche per le matrici triangolari?

   (c) Mostrate che $r(\mathbf{I}_n) = n$

   (d) Mostrate che $r(\lambda\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ se $\lambda \neq 0$.

   Soluzione

   (a) Sia $\mathbf{A}$ una matrice diagonale di ordine n. Supponiamo che r elementi diagonali siano non zero, immaginiamo siano i primi r. Allora

   $$\mathbf{A} = diag(a_{11}, \ldots, a_{rr}, 0, \ldots, 0)$$

   può essere scritta come

   $$\mathbf{A} = (a_{11}\mathbf{e}_1, \ldots, a_{rr}\mathbf{e}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

   le prime r colonne sono linearmente indipendenti, mentre le restanti $n - r$ sono di zeri, quindi il $r(\mathbf{A}) = r$.

   (b) Non è vero per le matrici triangolari. Infatti

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 1 con tutti gli elementi diagonali nulli; la matrice $\mathbf{B}$ ha rango 2 ed ha un solo elemento diagonale non nullo. Tuttavia l'affermazione è valida se la matrice ha rango pieno.

(c) La matrice identità ha n colonne linearmente indipendenti segue che

$$\mathbf{I}_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

implica che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Si ha che

$$r(\mathbf{A}) = dim(col(\mathbf{A})) = dim(col(\lambda\mathbf{A})) = r(\lambda\mathbf{A})$$

per $\lambda \neq 0$.

6. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine m e $\mathbf{B}$ una matrice ottenuta riarrangiando le colonne di una matrice identità dello stesso ordine. Cosa si ottiene con $\mathbf{AB}$? E con $\mathbf{BA}$?

Soluzione

$\mathbf{B}$ è detta matrice di permutazione. Ogni colonna di $\mathbf{B}$ è una colonna della matrice identità. La j-esima colonna del prodotto $\mathbf{AB}$ è dato da $\mathbf{Ab}_j$ dove $\mathbf{b}_j$ è la j-esima colonna di $\mathbf{B}$ che ha 1 nella posizione i-esima, con $i \neq j$. Quindi

$$\mathbf{a}_{\cdot i} = \mathbf{Ab}_j$$

postmoltilicazione di $\mathbf{A}$ semplicemente cambia l'ordine delle colonne di $\mathbf{A}$, cioè le permuta. Analogamente il prodotto $\mathbf{BA}$ permuta le righe di $\mathbf{A}$.