Università di Pavia

Econometria

2007-2008

Esercizi 1

Maggio, 2008

1. Espandete il prodotto matriciale:

$$\mathbf{X} = \{[\mathbf{AB} + (\mathbf{CD}')][(\mathbf{EF})^{-1} + \mathbf{GH}]\}'$$

   assumete che tutte le matrici siano quadrate e che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ siano invertibili.

2. Sia $col(\mathbf{A})$ lo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ e $ker(\mathbf{A})$ lo spazio nullo di $\mathbf{A}$ (o *kernel*)

$$ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$$

$$ker(\mathbf{A}') = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{0}\}.$$

   Considerate la matrice (3×2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   Mostrate che

$$col(\mathbf{A}) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} :$$

   determinando i valori di λ_1 e λ_2 partendo dalla definizione di $col(\mathbf{A})$.

3. Considerate le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Trovate il rango di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

(b) Mostrate che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = r(\mathbf{A}\mathbf{A}') = r(\mathbf{A}'\mathbf{A})$

(c) E' possibile costruire una matrice (3×4) di rango 4?

4. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $(m \times n)$ e sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ per un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

   (a) Mostrate che
   $$r(\mathbf{A}) \leq n - 1.$$

   (b) Vale il contrario?

5. (a) Mostrate che il rango di una matrice diagonale eguaglia il numero di elementi diagonali non nulli.

   (b) E' vero anche per le matrici triangolari?

   (c) Mostrate che $r(\mathbf{I}_n) = n$

   (d) Mostrate che $r(\lambda\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ se $\lambda \neq 0$.

6. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine m e $\mathbf{B}$ una matrice ottenuta riarrangiando le colonne di una matrice identità dello stesso ordine. Cosa si ottiene con $\mathbf{AB}$? E con $\mathbf{BA}$?