Università di Pavia

Econometria

2008-2009

Esercizi 5
Soluzioni

Maggio, 2009

Istruzioni: I commenti devono essere concisi!

1. Dato il MRL
$$y_t = \mathbf{x}_t'\beta + \epsilon_t \quad t = 1, \ldots, N.$$
con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Provate che sotto l'ipotesi che $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, lo stimatore
$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}})}{N - K + r}$$
dove r è il numero delle restrizioni, è non distorto per σ^2.

Soluzione

$$\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}'\widehat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}\right)' \left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1} \left(\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}\right)$$
$$E[\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}|\mathbf{X}] = \sigma^2(N - K) + \left(\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}\right)' \left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1} \left(\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}\right)$$

Ora
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}$$
$$\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c} + \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}$$

Sotto $H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$
$$\mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}$$

usando questo risultato
$$E[\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}|\mathbf{X}] = \sigma^2(N - K) + E\left[\boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}|\mathbf{X}\right]$$

La quantità in parentesi quadrate è uno scalare, è quindi uguale alla sua traccia. Permutiamo $\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'$ nella traccia per ottenere

$$E[\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}|\mathbf{X}] = \sigma^2(N - K) + E\left[tr\{\left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\}|\mathbf{X}\right]$$

Possiamo ora portare l'espressione dentro la traccia ed usare $E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}'] = \sigma^2\mathbf{I}_N$ per ottenere:

$$E[\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}|\mathbf{X}] = \sigma^2(N-K) + \left[tr\{\left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}_N\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\}\right]$$

portiamo σ^2 fuori dalla traccia e dopo la cancellazione dei prodotti delle matrici per le loro inverse, abbiamo

$$E[\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}'\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}] = \sigma^2(N-K) + \sigma^2 tr(\mathbf{I}_r) = \sigma^2(N-K+r)$$

2. Un economista riporta un insieme di stime: $\widehat{\beta}_1 = 1$ e $\widehat{\beta}_2 = 0,8$ con i rispettivi errori standard $se(\widehat{\beta}_1) = 0,07$ e $se(\widehat{\beta}_2) = 0.07$. L'autore scrive "Le stime mostrano che β_1 è più grande di β_2"

   (a) Scrivete la formula per l'intervallo di confidenza di $\theta = \beta_1 - \beta_2$, espresso in funzione delle stime, $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$ e degli errori standard e $\widehat{\rho}$; dove $\widehat{\rho}$ è il coefficiente di correlazione stimato tra $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$.

   (b) Si può calcolare $\widehat{\rho}$ con le informazioni riportate?

   (c) Ha ragione l'autore? Le informazioni riportate supportano le affermazioni dell'economista?

   Soluzione

   (a) La matrice di var-cov di $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)'$ è

$$\widehat{Var(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X})} = \begin{bmatrix} Var(\widehat{\beta}_1|\mathbf{X}) & Cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2|\mathbf{X}) \\ Cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2|\mathbf{X}) & Var(\widehat{\beta}_2|\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{s.e.}(\widehat{\beta}_1) & \widehat{\rho}\,\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)\text{s.e.}(\widehat{\beta}_2) \\ \widehat{\rho}\,\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)\text{s.e.}(\widehat{\beta}_2) & \text{s.e.}(\widehat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

   La varianza stimata di $\widehat{\theta} = \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2$ è

$$\widehat{Var(\widehat{\theta}|\mathbf{X})} = (1 - 1)\widehat{Var(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X})}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   l'errore standard è

$$\text{s.e.}(\widehat{\theta}) = \sqrt{\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)^2 - 2\widehat{\rho}\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)\text{s.e.}(\widehat{\beta}_2) + \text{s.e.}(\widehat{\beta}_2)^2}$$

   Con l'ipotesi di gaussianità di $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ l'intervallo di confidenza per $\theta = \beta_1 - \beta_2$ è

$$\widehat{\theta} \pm t_{N-K,\alpha/2}\text{s.e.}(\widehat{\theta}) \simeq \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 \pm 1,96\sqrt{\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)^2 - 2\widehat{\rho}\text{s.e.}(\widehat{\beta}_1)\text{s.e.}(\widehat{\beta}_2) + \text{s.e.}(\widehat{\beta}_2)^2}$$

   (b) No. Tutto quello che sappiamo è $-1 < \widehat{\rho} < 1$.

   (c) Con i valori osservati l'intervallo di confidenza di θ è

$$0,2 \pm 1,96(0,07)\sqrt{2(1-\widehat{\rho})} \simeq 0,2 \pm 0,2\sqrt{1-\widehat{\rho}}$$

   Non conosciamo $\widehat{\rho}$ ma la domanda è se possiamo rifiutare $\theta = 0$ o, in modo equivalente, se l'intervallo di confidenza per θ include 0, questo succede quando

$$0,2 - 0,2\sqrt{1-\widehat{\rho}} < 0 \quad \text{e} \quad 0,2 + 0,2\sqrt{1-\widehat{\rho}} > 0$$

   ovvero se e solo se $\widehat{\rho} < 0$. Potrebbe aversi che $\widehat{\rho} > 0$ e quindi che rifiutiamo la nulla $\beta_1 = \beta_2$, ma l'informazione riportata non è sufficiente a tal proposito. Questo significa che l'evidenza riportata **non supporta la conclusione dell'autore** cioè che $\beta_1 > \beta_2$.