Università di Pavia

Richiami di Algebra Lineare

Eduardo Rossi

$$\mathbf{a}: \quad (n \times 1)$$
$$\mathbf{b}: \quad (n \times 1)$$

Prodotto interno

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Modulo (lunghezza):

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Vettori ortogonali: Se **a** e **b** sono vettori colonna n-dimensionali sono detti *ortogonali* se e solo se

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0$$

Se $\mathbf{a}'\mathbf{a} = \mathbf{b}'\mathbf{b} = 1$ sono detti *ortonormali.*

Siano $\mathbf{a}_{(i)}, i = 1, \ldots, K$ vettori $(n \times 1)$ i cui elementi appartengono a $\mathcal{F}$. Con c_i scalari $c_i \in \mathcal{F}$. Se

$$\sum_{i=1}^{K} c_i \mathbf{a}_{(i)} = 0$$

implica che $c_i = 0, i = 1, \ldots, K$ i vettori $\{\mathbf{a}_{(i)}, i = 1, \ldots, K\}$ sono detti linearmente indipendenti o costituiscono un insieme linearmente indipendente.

Se un insieme di vettori (non nulli) $\mathbf{a}_{(i)} \in \mathcal{F}, i = 1, \ldots, K$ sono mutualmente ortogonali, cioè $\forall i \neq j$ $\mathbf{a}'_{(i)}\mathbf{a}_{(j)} = 0$, allora sono linearmente indipendenti.

Una collezione non vuota di elementi $\mathbb{V}$ è detta *spazio lineare* (o *spazio vettoriale*, o *spazio lineare vettoriale*) sull'insieme $\mathcal{F}$ se e solo se esistono due

1. addizione vettoriale
2. moltiplicazione scalare

tali per cui le seguenti condizioni valgano per tutti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ e $c, d \in \mathcal{F}$

i. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{V}$

ii. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

iii. Esiste un unico elemento zero in $\mathbb{V}$ inidcato con $\mathbf{0}$ e chiamato vettore zero, tale che

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

iv. La moltiplicazione scalare è distributiva rispetto all'addizione vettoriale $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ e $c, d \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} c \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= c \cdot \mathbf{x} + c \cdot \mathbf{y} \\ (c + d) \cdot \mathbf{x} &= c \cdot \mathbf{x} + d \cdot \mathbf{x} \\ c \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{V} \end{aligned}$$

v. La moltiplicazione scalare è associativa $(cd) \cdot \mathbf{x} = c \cdot (d\mathbf{x})$

vi.

$$0 \cdot \mathbf{x} = 0 \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Sia $\mathbb{V}_n$ un generico spazio vettoriale a n dimensioni su $\mathcal{F}$, supponiamo

$$\mathbf{a}_{(i)} \in \mathbb{V}_n \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; m \geq n$$

Se ogni vettore, $\mathbf{b}$, in $\mathbb{V}_n$, può essere scritto come

$$b = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{a}_{(i)} \;\; c_i \in \mathcal{F}$$

allora l'insieme $\{\mathbf{a}_{(i)} : i = 1, 2, \ldots, m\}$ ricopre lo spazio vettoriale S_n

Una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{V}_n$ è una copertura dello spazio con dimensione minima, cioè un insieme di vettori linearmente indipendenti di dimensione minima che copre $\mathbb{V}_n$.

Esempio: $\mathbb{V}_n = \mathbb{R}^n$

$$\{\mathbf{e}_{\cdot i} : i = 1, \ldots, n\} \quad \mathbf{e}_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo è un insieme ortonormale: $\mathbf{e}'_{\cdot i}\mathbf{e}_{\cdot j} = 0$, $||\mathbf{e}_{\cdot i}|| = 1$.

Una base non è unica, ma tutte le basi per un dato spazio vettoriale contengono lo stesso numero di vettori. Questo numero è la *dimensione* dello spazio vettoriale: $\dim(\mathbb{V}_n)$.

Supponiamo che $\dim(\mathbb{V}_n) = n$ allora può essere mostrato che ogni altro sottoinsieme di $n + i$ vettori è linearmente dipendente per $i \geq 1$ e che nessun insieme con meno di n vettori può riempire $\mathbb{V}_n$.

Uno spazio vettoriale che possiede una base con un numero finito di vettori è finito dimensionale.

Ogni elemento dello spazio vettoriale è una combinazione lineare unica dei vettori della base.

Se $\{\mathbf{a}_{(i)} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ è una base per uno spazio vettoriale $\mathbb{V}_n$ ogni vettore in $\mathbb{V}_n$, $\mathbf{b}$, è esprimibile in modo univoco in termini di questa base.

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(1)} \mathbf{a}_{(i)} = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(2)} \mathbf{a}_{(i)}$$

dove $b_i^{(1)}, b_i^{(2)} \;\; i = 1, 2, \ldots, m$ sono appropriati insiemi di scalari. questo implica

$$0 = \sum_{i}^{m} (b_i^{(1)} - b_i^{(2)}) \mathbf{a}_{(i)}$$

Ma una base è un insieme linearmente indipendente; quindi, possiamo concludere:

$$(b_i^{(1)} - b_i^{(2)}) = 0 \rightarrow b_i^{(1)} = b_i^{(2)} \;\; i = 1, 2, \ldots, m$$

Sia $a_{ij} \in \mathcal{F} \;\; i = 1, \ldots, m \;\; j = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (m \times n)$$

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$$

La j-esima colonna di $\mathbf{A}$ è $a_{.j}$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

La i-esima riga è

$$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

Trasposizione

$$\mathbf{A}' = \{a_{ji}\}$$

Matrice simmetrica

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

Matrice diagonale

$$a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\mathbf{A} = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

Matrice triangolare superiore

$$a_{ij} = 0 \;\; i > j$$

Matrice triangolare inferiore

$$a_{ij} = 0 \;\; i < j$$

Matrice identità

$$I_n \;\; (n \times n) : a_{ii} = 1, a_{ij} = 0 \;\; i \neq j$$

Matrice nulla

$$0_{m \times n} = \{0\}$$

Matrice idempotente

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}$$

Operazioni: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matrici con elementi in $\mathcal{F}$, $c, \alpha \in \mathcal{F}$. Si ha:

i Moltiplicazione scalare $c \cdot \mathbf{A} = \{ca_{ij}\}$

ii Addizione matriciale $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{ij} + b_{ij}\}, \mathbf{A} \ \ (n \times m), \mathbf{B} \ \ (n \times m)$

iii Moltiplicazione matriciale

$$\mathbf{A} \ \ (m \times n) \quad \mathbf{B} \ \ (n \times p)$$

$$\mathbf{AB} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$$

In generale $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

$\mathbf{A}\ (m \times n)$. Il *rango colonna* di $\mathbf{A}$ è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti. Il *rango riga* di $\mathbf{A}$ è il massimo numero di righe linearmente indipendenti. Il rango riga di $\mathbf{A}$ è uguale al rango colonna di $\mathbf{A}$. ($r(\cdot)$ indica il rango).

$$r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$$

Sia $\mathbf{A}\ (m \times n)$, $m \leq n$. $\mathbf{A}$ ha *rango pieno* se e solo se

$$r(\mathbf{A}) = m$$

Sia $\mathbf{A}\ (m \times m)$. $\mathbf{A}$ è *non singolare* quando

$$r(\mathbf{A}) = m$$

Sia $\mathbf{A}$ $(m \times m)$, l'inversa $\mathbf{B}$, se esiste, è definita dalla proprietà

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = I_n$$

Sia $\mathbf{A}$ $(m \times m)$, $\mathbf{A}$ è invertibile se e solo se

$$r(\mathbf{A}) = m$$

Per le matrici quadrate le espressioni invertibile, nonsingolare, rango pieno, sono sinonimi.

Spazio delle colonne: Sia $\mathbf{A}$ $(m \times m)$. Lo spazio delle colonne, indicato con $C(\mathbf{A})$, è l'insieme dei vettori colonna m-dimensionali

$$C(\mathbf{A}) = \{\xi : \xi = \mathbf{A}\mathbf{x}\} \text{ con } \mathbf{x} \ (n \times 1)$$

Spazio delle righe: E' l'insieme dei vettori riga n-dimensionali:

$$R(\mathbf{A}) = \{\zeta : \zeta = \mathbf{y}\mathbf{A}\} \text{ con } \mathbf{y} \ (1 \times m)$$

Lo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ è uno spazio vettoriale che è coperto dalle colonne di $\mathbf{A}$. La dimensione di $C(\mathbf{A})$ è il rango di $\mathbf{A}$.

$$\dim\left[C(\mathbf{A})\right] = r(\mathbf{A})$$

Lo spazio delle righe è uno spazio vettoriale coperto dalle sue righe e la dimensione di questo spazio è anche uguale al rango di $\mathbf{A}$poichè il rango riga di $\mathbf{A}$ è uguale al rango colonna.

Spazio nullo: Lo spazio nullo di $\mathbf{A}$, indicato con $N(\mathbf{A})$, è l'insieme

$$N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$$

La dimensione dello spazio nullo è detta *nullità* di $\mathbf{A}$, indicata con $n(\mathbf{A})$.

Sia $\mathbf{A}$ $(p \times q)$, allora

$$r(\mathbf{A}) + n(\mathbf{A}) = q$$

Sia $\mathbf{A}$ $(p \times q)$, sia $\mathbf{B}$ una matrice non singolare di ordine q, $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}$. Allora

$$r(\mathbf{D}) = r(\mathbf{A})$$

Siano $\mathbf{A}$ $(p \times q)$ e $\mathbf{B}$ $(q \times r)$, poniamo

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB}$$

allora

$$r(\mathbf{D}) \leq \min\left[r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\right]$$

- Moltiplicare due (o un numero finito di) matrici produce una matrice il cui rango non può eccedere il rango più piccolo tra quelli delle matrici nel prodotto.
- Il prodotto di matrici nonsingolari è nonsingolare.
- Moltiplicare una matrice per una matrice nonsingolare non cambia il suo rango.

A matrice quadrata di ordine m. La sua *traccia* è

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B}) \\ tr(\mathbf{AB}) &= tr(\mathbf{BA}) \end{aligned}$$

A matrice quadrata di ordine m. Determinante

$$|\mathbf{A}| = \sum (-1)^s a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{mj_m}$$

$j_1, j_2, \ldots, j_m$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, m$. $s = 0, 1$ dipende se il numero delle trasposizioni richieste per ristabilire $j_1, j_2, \ldots, j_m$ nella sequenza naturale $1, 2, \ldots, m$ è pari o dispari. La somma è rispetto a tutte le possibili permutazioni.

Proprietà

1. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
2. $\mathbf{A}$ $(m \times m)$, $\mathbf{B}$ $(m \times m)$ è ottenuta scambiando la k-esima riga con la r-esima riga di $\mathbf{A}$ $(k \leq r)$

$$|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$$

3. $\mathbf{A}$ $(m \times m)$ con due righe identiche: $|\mathbf{A}| = 0$.
4. $\mathbf{A}$ $(m \times m)$, gli elementi nella riga r sono zero: $|\mathbf{A}| = 0$
5. $\mathbf{B} : B_{i\cdot} = kA_{i\cdot}$, $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$.
6. $\mathbf{B} : B_{r\cdot} = A_{r\cdot} + kA_{s\cdot}$, $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine m e sia $\mathbf{B}_{ij}$ la matrice ottenuta cancellando da $\mathbf{A}$ la sua i-esima riga e j-colonna. $\mathbf{B}_{ij}$ è il *Minore complementare*.

Il *Cofattore* dell'elemento a_{ij} di $\mathbf{A}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{B}_{ij}|$$

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine m. Allora

$$|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

Un importante risulato è il seguente:

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Sia $\mathbf{A}$ una matrice invertibile di ordine m, allora

$$|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$$

Matrice aggiunta: $\mathbf{A}, (m \times m)$. Sia A_{ij} il cofattore dell'elemento i, j di $\mathbf{A}$, a_{ij}.

$$\mathbf{B} \equiv (A_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

L'aggiunta di $\mathbf{A}$ è:

$$agg(\mathbf{A}) = \mathbf{B}'$$

L'inversa di $\mathbf{A}$, matrice di ordine m invertibile, è

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{agg(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$\mathbf{A}$ $(m \times n)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{llll} A_{11}: & (m_1 \times n_1) & A_{12}: & (m_1 \times n_2) \\ A_{21}: & (m_2 \times n_1) & A_{22}: & (m_2 \times n_2) \end{array}$$

B $(m \times n)$, partizionata in modo conforme:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{array} \right] \qquad \begin{array}{llll} C_{11}: & (n_1 \times q_1) & C_{12}: & (n_1 \times q_2) \\ C_{21}: & (n_2 \times q_1) & C_{22}: & (n_2 \times q_2) \end{array}$$

$$AC = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} \\ A_{21}C_{11} + A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12} + A_{22}C_{22} \end{array} \right]$$

$\mathbf{A} \quad (m \times m)$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

$A_{ij} \;\; (m_i \times m_j), \;\; i,j = 1,2, \; m_1 + m_2 = m.$

Se $A_{21} = 0$, allora

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

Se $A_{12} = 0$, allora

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

Se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata partizionata di ordine m:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$$

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

Una trasformazione lineare T dello spazio vettoriale reale $\mathbb{U}$ nello spazio vettoriale reale $\mathbb{V}$ è una funzione che assegna ad ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ un unico vettore $T(\mathbf{u}) \in \mathbb{V}$ tale che

$$T(a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{w}) = a \cdot T(\mathbf{u}) + b \cdot T(\mathbf{w})$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{U}$. Lo spazio $\mathbb{U}$ è detto dominio e lo spazio $\mathbb{V}$ è chiamato codominio.

Le matrici possono rappresentare insiemi di vettori o trasformazioni lineari. Sia $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_K\}$ una qualunque base dello spazio vettoriale K-dimensionale $\mathbb{U}$ e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ sia una base dello spazio vettoriale N-dimensionale $\mathbb{V}$. Allora $T(\mathbf{u}_k) \in \mathbb{V}$, può essere espressa come una combinazione lineare della base:

$$T(\mathbf{u}_k) = \sum_{n=1}^{N} x_{nk}\mathbf{v}_n$$

Gli x_{nk} sono unici. La matrice $\mathbf{X}$ corrisponde uno-a-uno con T.

Sia $\mathbf{A}$ $(m \times m)$; λ scalare e $\mathbf{x}$ vettore $(m \times 1)$ non nullo. Se

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

λ autovalore, $\mathbf{x}$ autovettore. L'autovettore non è unico. Se $\mathbf{x}$ è un autovettore e c uno scalare non nullo, $c\mathbf{x}$ è uno autovettore.
Imponendo $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$ autovettore unico.

Calcolo degli autovalori

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

o

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

λ autovalore, $\mathbf{x}$ autovettore

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}'\mathbf{x} &= 1 \end{aligned}$$

queste implicano che le colonne di $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti.

Questo significa che:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad \text{Equazione caratteristica}$$

L'equazione caratteristica rappresenta un polinomio di grado m in λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_0$$

dove

$$b_0 = |-\mathbf{A}| = (-1)^m |\mathbf{A}|$$

Il teorema fondamentale dell'algebra assicura che, sul campo dei numeri complessi, il polinomio di grado m ha m radici (in ordine decrescente):

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

L'equazione caratteristica può anche essere scritta come

$$0 = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)$$

Se λ_i è uno degli autovalori, le colonne di $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti, ne segue che, se esiste almeno un vettore non nullo, $\mathbf{x}_i$, tale che

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i = 0$$

La coppia $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ rappresenta un autovalore e la sua radice caratteristica, con l'autovettore normalizzato a 1.

Sia $\mathbf{A}$ $(m \times m)$ una matrice con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Se $\mathbf{A}$ è una matrice singolare almeno uno dei suoi autovalori è zero.

Se $\mathbf{A}$ ha s, $s < m$, **autovalori distinti**,$\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(s)}$, diciamo che $\lambda_{(j)}$ è ripetuto m_j volte:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_{(j)})^{m_j}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1} m_j &= m \\ \lambda_{(j)} &\neq \lambda_{(i)} \quad i \neq j \end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ $(m \times m)$ e $r(\mathbf{A}) = r \leq m$ allora ha r radici non nulle e $m - r$ radici nulle, cioè la radice zero è ripetuta $m - r$ volte.

Se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine m e λ_i sono i suoi autovalori. Allora

- gli autovalori di $\mathbf{A}'$ sono quelli di $\mathbf{A}$.
- se $\mathbf{A}$ è nonsingolare , gli autovalori di $\mathbf{A}^{-1}$ sono dati da

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Siano $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine m e λ_i $i = 1, 2, \ldots, m$ i suoi autovalori, allora

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$\mathbf{A}$, $(m \times m)$, $\mathbf{Q}$ $(m \times m)$ invertibile

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

ha gli stessi autovalori di $\mathbf{A}$ e se $\mathbf{x}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ allora $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$ è un autovettore di $\mathbf{B}$.

$\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$ sono dette matrici *simili*.

Se esiste una matrice $\mathbf{P}$ tale che

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

dove $\mathbf{D}$ è una matrice diagonale, allora $\mathbf{P}$ deve essere la matrice degli autovettori di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine m e supponiamo che

$$\lambda_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \;\; n \leq m$$

siano gli autovalori distinti di $\mathbf{A}$. Se

$$\{\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

è l'insieme degli autovettori, allora questo è un insieme linearmente indipendente.

Se $\mathbf{A}$ è una matrice di ordine m con *tutti autovalori distinti* allora $\mathbf{A}$ è simile ad una matrice diagonale.

Siano $(\lambda_i, \mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \ldots, m$ gli autovalori con gli associati autovettori. La matrice $\mathbf{\Lambda}$ contiene gli autovalori

$$\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

Le colonne della matrice $\mathbf{\Lambda}$ sono i corrispondenti autovettori:

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$$

La relazione fra la matrice $\mathbf{A}$ e i suoi autovalori e autovettori

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{A}\mathbf{x}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \ldots & \lambda_m\mathbf{x}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{\Gamma} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ è una matrice di ordine m, allora $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se per ogni autovalore λ di $\mathbf{A}$ la molteplicità di λ è uguale alla nullità di $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Se ad ogni autovalore corrisponde un numero di autovettori linearmente indipendenti pari alla molteplicità dell'autovalore si dice che gli autovettori costituiscono un sistema completo, allora:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}$$

Se invece l'insieme degli autovettori non costituisce un sistema completo non è possibile diagonalizzare la matrice.

Vettori ortogonali: Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ $(m \times 1)$. *Mutualmente ortogonali* se e solo se:

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0$$

Vettori ortonormali:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{a}'\mathbf{a} &= 1 \\ \mathbf{a}'\mathbf{a} &= 1 \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{Q}$ una matrice quadrata di ordine m. E' detta *ortogonale* se e solo se le sue colonne sono ortonormali.

Sia $\mathbf{Q}$ una matrice quadrata di ordine m. Allora è non singolare, perchè le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Sia $\mathbf{Q}$ una matrice ortogonale di ordine m, allora

1.
$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^{-1}$$

2.
$$|\mathbf{Q}| = 1 \;\; \text{o} \;\; |\mathbf{Q}| = -1$$

3.
$$\lambda_i = \pm 1 \;\; i = 1, 2 \ldots, m$$

Sia $\mathbf{S}$ una matrice simmetrica di ordine m i cui elementi sono reali, allora i suoi autovalori sono anch'essi reali.

Sia $\mathbf{S}$ una matrice simmetrica di ordine m, con autovalori distinti: $\lambda_{(i)} : \; i = 1, 2, \ldots, s, \; s \leq m$, con molteplicità di $\lambda_{(i)}$ pari a m_i. Allora all'autovalore $\lambda_{(i)}$ corrispondono m_i autovettori ortonormali linearmente indipendenti.

Sia $\mathbf{S}$ una matrice simmetrica di ordine m, allora gli autovettori possono essere scelti in modo tale da essere un insieme ortonormale, cioè esiste una matrice ortonormale

$$\mathbf{Q}'\mathbf{S}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$$

La diagonalizzazione è unica se gli autovalori di $\mathbf{S}$ sono tutti distinti.

Sia $\mathbf{S}$ una matrice simmetrica di ordine m per la quale $\mathbf{Q}'\mathbf{S}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$

$$r(\mathbf{S}) = r \leq m$$

se e solo se il numero di autovalori non nulli di $\mathbf{S}$ è r.

$\mathbf{A}$ $(m \times m)$ è detta *idempotente* se e solo se

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}$$

Se $\mathbf{A}$ è una matrice di ordine m idempotente, allora i suoi autovalori sono 0 o 1.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice idempotente di ordine m e rango r, allora

$$tr(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$$

Sia $\mathbf{A}$ è una matrice di ordine m idempotente e simmetrica con $r(\mathbf{A}) = r$, la diagonalizzazione di $\mathbf{A}$ ha la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}'$$

dove

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Siano $\mathbf{A}\ (m \times m)$ e $\mathbf{x}\ (m \times 1)$

Forma quadratica		
$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$	$\forall \mathbf{x}$	Semidefinita postiva
$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	Definita positiva
$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$	$\forall \mathbf{x}$	Semidefinita negativa
$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	Definita negativa

Una matrice $\mathbf{B}$ non ha bisogno di essere simmetrica. Tuttavia, se

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}')$$

dove $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}'\left[\frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{B}')\right]\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}'\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Di conseguenza le proprietà delle forme quadratiche in **B** sono estese a quelle in **A**.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice di ordine m. Se $\mathbf{A}$ è una definita positiva, è anche semidefinita positiva. Il contrario non è vero.

Sia $\mathbf{A}$ una di ordine m, allora

1. Se $\mathbf{A}$ è una definita positiva: $a_{ii} > 0 \;\; i = 1, \ldots, m$
2. Se $\mathbf{A}$ è una semidefinita positiva: $a_{ii} \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, m$

Sia $\mathbf{A}$ una matrice definita positiva di ordine m, allora esiste una matrice triangolare inferiore $\mathbf{L}$, tale che: $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ sia definita positiva è che i suoi autovalori siano tutti strettamente positivi.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica di ordine m e siano $\lambda_i \;\; i = 1, 2, \ldots, m$ gli autovalori reali. Se $\mathbf{A}$ è semidefinita positiva allora $\lambda_i \geq 0 \;\; i = 1, 2, \ldots, m$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica di ordine m. Se $\mathbf{A}$ è definita positiva allora $r(A) = m$. Se $\mathbf{A}$ è semidefinita positiva, allora $r(\mathbf{A}) < m$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica di ordine m. Allora $\mathbf{A}$ è definita positiva se e solo esiste una matrice $\mathbf{S}$ di dimensione $(n \times m)$ e $r(\mathbf{S}) = m, \;\; n \geq m$ tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}'\mathbf{S}$$

E' semidefinita positiva se e solo se

$$r(\mathbf{S}) < m$$

Se $\mathbf{A}$ è una matrice definita positiva

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &> 0 \\ tr(\mathbf{A}) &> 0 \end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ è una matrice semidefinita positiva

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 0 \\ tr(\mathbf{A}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ è simmetrica e definita positiva, $\mathbf{A}^{-1}$ è simmetrica e definita positiva.

Se $\mathbf{A}$ $(m \times m)$ è simmetrica e definita positiva allora esiste una matrice non singolare $\mathbf{K}$ $(m \times m)$ tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{KAK}' &= \mathbf{I} \\ \mathbf{K}'\mathbf{K} &= \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due matrici definite positive, entrambe di ordine m. Se $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ è definita positiva allora $\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}^{-1}$ è definita positiva. Se $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ è semidefinita positiva allora $\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}^{-1}$ è semidefinita positiva.

Se $f(\mathbf{x}) : \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial (\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{a}'$$

Matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobiana:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (m \times n)$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}'}{\partial \mathbf{x}'} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \right)'$$

Se $n = m$ determinate Jacobiano (o Jacobiano): $\left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \right|$.

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}'}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}'$$

$$\frac{\partial \left(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \right)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$$

Se $\mathbf{A}$ è simmetrica

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{x} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$$

Se $\mathbf{A}$ è simmetrica

$$\frac{{}^2\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}'} = \frac{2\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = 2\mathbf{A}$$